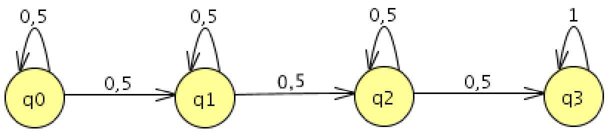
Montag, 14.09.2015

Wie löst ein Informatiker ein Problem? (Teil 2)

Wir gehen von folgender Problemstellung aus: Ein Chip ist auf einer Seite mit 0 und auf der anderen mit 1 beschriftet. Er wird so lange geworfen, bis die Summe der Einzelergebnise **> 2** ist (also mind. 3). Ein Diagramm zu diesem Spiel:



Die Zustände zählen hier die jeweilige Anzahl der Einsen. Aus dem letzten Zutsand kommen wir nicht mehr heraus. Man nennt so einen Zustand auch einen **absorbierenden Zustand**. Der Zustandverteilung (s. Tabelle)

Zustandsverteilung

Zustand	0	1	2	3
Start:	**1**	**0**	**0**	**0**
1. Spiel:	**0.5**	**0.5**	**0**	**0**
2. Spiel:	**0.25**	**0.5**	**0.25**	**0**
3. Spiel:	**0.125**	**0.375**	**0.375**	**0.125**

entnehmen wir, dass die Wahrscheinlichkeiten Schritt für Schritt "nach rechts wandern". Die **zentrale Frage** ist nun:

Wie entwickelt sich diese Zustandsverteilung "auf lange Sicht"?

Alternativ können wir auch fragen: Welche Wahrscheinlichkeit hat der **absorbierende Zustand** q_3 "auf lange Sicht". Zur Beantwortung dieser Fragen untersuchen wir die vier Gleichungen

- $v_0' = 0.5 * v_0$
- $v_1' = 0.5 * v_0 + 0.5 * v_1$
- $v_2' = 0.5 * v_1 + 0.5 * v_2$
- $v_3' = 0.5 * v_2 + v_3$

Wir machen die vier Gleichungen "etwas komplizierter":

- $v_0' = 0.5 * v_0 + 0 * v_1 + 0 * v_2 + 0 * v_3$
- $v_1' = 0.5 * v_0 + 0.5 * v_1 + 0 * v_2 + 0 * v_3$
- $v_2' = 0 * v_0 + 0.5 * v_1 + 0.5 * v_2 + 0 * v_3$
- $v_3' = 0 * v_0 + 0 * v_1 + 0.5 * v_2 + 1.0 * v_3$

Das sieht in etwa so aus: Wir erhalten die Folgewahrscheinlichkeiten der Zustände, indem wir die Zustandswahrscheinlichkeiten mit einem **"Zahlenfeld"** multiplizieren. Das Zahlenfeld nennt man auch **Matrix**, und die Matrix sieht in unserem Fall folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Jetzt werden wir "mutig" und schreiben die linke Seite so:

$$\begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}$$

Man nennt dieses Zahlenfeld mit nur einer Spalte einen **Vektor**, eben den Vektor der Folgewahrscheinlichkeiten. Unser Anfangszustand als Vektor geschrieben sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die vielen Multiplikationen $*$ im Gleichungssystem oben schreiben wir jetzt so:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

und als Ergebnis erhalten wir endlich:

$$\begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also die Zeile in der Zustandstabelle oben zum 1. Spiel. Hier die Multiplikation zur Zeile des 2. Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Multiplikation zur Zeile des 3. Spiels:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \\ 0.25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

Etwas Nachdenken ergibt, dass wir hier fortgesetzt **Matrizen mit Vektoren multiplizieren** (die zueinander "passen" müssen!). Das geht auch "einfacher":

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1.0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

Das liest man **von rechts nach links**: die 1. Multiplikation ergibt die Zeile zum 1. Spiel, die 2. Multiplikation ergibt die Zeile zum 2. Spiel, die 3. Multiplikation ergibt die Zeile zum 3. Spiel, u. s. w. Jetzt führen wir Buchstaben ein: Die Matrix bekommt den Buchstaben **U**, die Vektoren den Buchstaben **v**, dann sieht die Zeile eben so aus:

$$\mathbf{U} * \mathbf{U} * \mathbf{U} * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

wobei v' hier die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem dritten Spiel bezeichnet. Kürzer schreiben wir für **U** * **U** * **U** einfach $\mathbf{U^3}$ (Potenz!) und es ergibt sich:

$$\mathbf{U}^3 * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{U}^{20} * \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

steht dann für die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem 20. Spiel, aber wer soll das berechnen? Da fällt unserem Informatiker ein: der Computer kann das doch! Kann er auch wirklich, genauer wir benutzen von *Libre Office* **Calc**, also die *Tabellenkalkulation*.

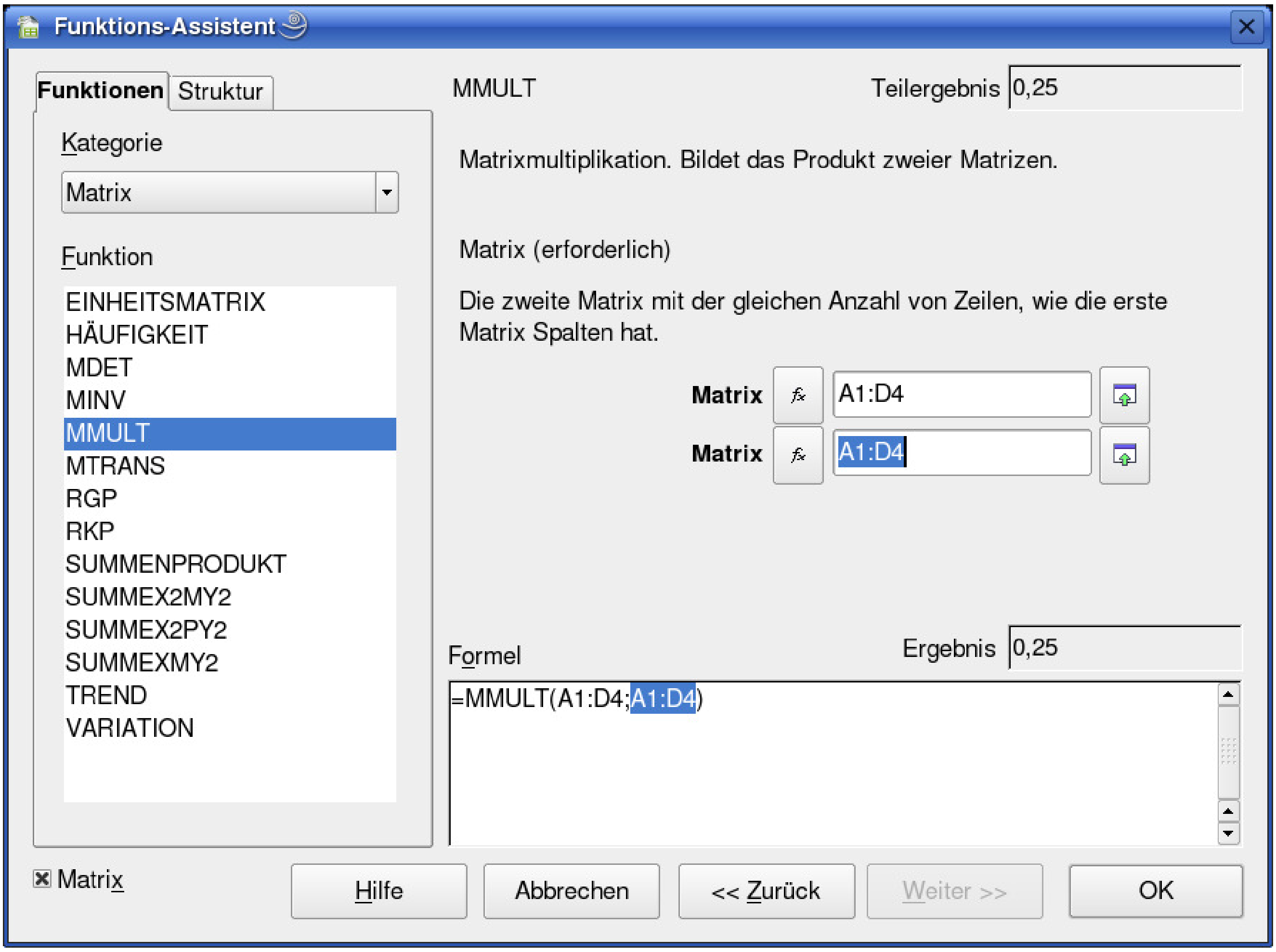
Matrizenmultiplikation in Calc

Erst unser Beispiel in Calc:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0,5	0	0	0		0,25	0	0	0	
2	0,5	0,5	0	0		0,5	0,25	0	0	
3	0	0,5	0,5	0		0,25	0,5	0,25	0	
4	0	0	0,5	1		0	0,25	0,75	1	
5										
6						0,06	0	0	0	
7						0,25	0,06	0	0	
8						0,38	0,25	0,06	0	
9						0,31	0,69	0,94	1	
10										
11				1		0	0	0	0	
12		v=		0		0,03	0	0	0	
13				0		0,11	0,03	0	0	
14				0		0,86	0,96	1	1	
15										
16						0				
17	Zustandswahrscheinlichkeiten					0,03				
18	nach dem 8. Spiel: U^8 * v =					0,11				
19						0,86				
20										

Im Bereich **A1:D4** steht die Matrix **U**, in **F1:I4** steht $\mathbf{U^2}$, in **F6:I9** steht $\mathbf{U^4=U^2 * U^2}$, in **F11:I14** steht $\mathbf{U^8=U^4 * U^4}$. Die Zustandswahrscheinlichkeiten nach dem 8. Spiel stehen in **F16:F19** → $\mathbf{U^8 * v}$

Matrizen werden also in Calc ganz normal wie Zahlen eingegeben, die **Matrizenmultiplikation** erhalten wir über **Einfügen** → **Funktion**:



Bei der Kategorie habe ich **Matrix** ausgewählt, für die Matrizenmultiplikation ist der Calc-Befehl **MMULT** verantwortlich, und man beachte den Hinweis: **Die zweite Matrix mit der gleichen Anzahl von Zeilen, wie die erste Matrix Spalten hat.**

Vorsicht: → Bei der Matrizenmultiplikation in Calc funktioniert markieren, kopieren & einfügen **nicht**!!! ←

Aufgaben

- **Aufgabe 1**: Versuche das Beispiel oben anhand der Calc-Datei nachzuvollziehen (Datei herunterladen und entpacken)
- **Aufgabe 2**: Bilde in Calc das Produkt $\mathbf{U^{16}} = \mathbf{U^8} * \mathbf{U^8}$ und berechne dann erneut die Zustandswahrscheinlichkeiten $\mathbf{U^{16}} * \mathbf{v}$
- **Aufgabe 3**: Bestimme für das Computerspiel mit den drei Level 0, 1 und 2 vom letzten Mal die Matrix U, und berechne dann mit Calc die Zustandswahrscheinlichkeiten $\mathbf{U^8} * \mathbf{v}$. Wie sieht wohl $\mathbf{U^{16}} * \mathbf{v}$ aus?
- **Aufgabe 4**: Wir erweitern Aufgabe 3 vom letzten Mal mit der Euromünze, die so lange geworfen wird, bis zum ersten Mal das Muster **"Zahl-Wappen-Zahl"** auftritt. Bestimme für die Zustände im Diagramm diesmal die **Verteilung der Wk nach dem vierten Wurf** mit Hilfe von **Calc**. Wie sieht hier eine Verteilung nach dem 8. Wurf aus?
